



## SANDVIÇ DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN DELAMİNASYON BURKULMASININ FEM İLE İNCELENMESİ

Fatih Aylıkçı, Nazmiye Yahnioglu ve Armağan Elibol  
Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul

### ABSTRACT

In this study, we attempt to investigate a buckling delamination of a PZT/Metal/PZT sandwich rectangular thick plate with lengths  $\ell_1$  and  $\ell_3$ , and with thickness  $h$ . We assume that between the face and core layers there are two parallel interface-band cracks. We also assume that the PZT layers are unelectroded with vanishing normal electric displacement on the face planes of those and are electroded at their edges. At the same time, in the all edges of the whole plate the simply-supported (in the 3D sense) conditions for the purely mechanical quantities are satisfied.

It is assumed that the plate is loaded at the edges of that by uniformly distributed normal compressional mechanical forces. Moreover, it is assumed that the edges of the cracks before the external loading have infinitesimal initial imperfection and it is required to investigate the development this imperfection with the external uniaxial loading and to determine the critical values of this loading under which the buckling-delamination takes place from the criterion, according to which, the opening displacements of the cracks edges approaches to an infinity. The mathematical formulation of the corresponding boundary value problem is made in the framework of the 3D geometrically non-linear exact equations of the theory of electro-elasticity for the piezoelectric materials. The solution to the formulated problem is presented in the power series form with respect to the small parameter which characterizes the degree of the initial imperfectness. Investigations are made with the use of the zeroth and first approximations. The quantities related to the zeroth approximation is determined analytically, however, the quantities related to the first approximation is found numerically by employing 3D FEM modeling. Numerical results on the critical values of the loading parameters for the various PZT and metal materials are presented and discussed.

### ÖZET

Bu çalışmada, taban alanı  $\ell_1 \times \ell_3$  ve kalınlığı  $h$  olan dış katmanları piezoelektrik (PZT) orta katmanı elastik (Metal) malzemeden yapılmış sandviç dikdörtgen kalın plağın, burkulma-delaminasyonu incelenmiştir. Plağın dış katmanları ile orta katmanı arasında paralel iki band çatlak olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca, PZT katmanlarının alt ve üst yüzeylerinden elektrik geçişinin olmadığı (yalıtkan), yanal yüzeylerinde ise elektriksel potansiyelin sıfır olduğu kabul edilmiştir. Aynı zamanda, dikdörtgen kalın plağın tüm yanal yüzeylerinden basit mesnet (3D anlamında) koşullarının sağladığı kabul edilmektedir.

Dikdörtgen kalın plağın karşılıklı iki kenarından, çatlaklar doğrultusunda etkiyen düzgün yayılı normal statik basınç kuvveti ile yüklendiği varsayılmaktadır. Ayrıca, plağın içerdiği çatlakların yüzeylerinin, yükleme yapılmadan önce, çok küçük eğrilığe sahip olduğu ve bu ön eğrilğin düzgün yayılı dış basınç kuvveti etkisinde büyüyerek sonsuza gitmesi kriterinden,

ele alınan plağa ait kritik burkulma-delaminasyon kuvveti belirlenecektir. Ele alınan dikdörtgen piezoelektrik sandviç kalın plağa ait burkulma-delaminasyon problemlerinin matematiksel formülasyonu, elektro elastisite teorisinin üç boyutlu (3D) geometrik doğrusal olmayan kesin denklemleri çerçevesinde yapılmıştır. Formüle edilmiş problemlerin çözümü, çatlak yüzeylerinde başlangıçta var olduğu kabul edilen ön eğintilerin derecesini karakterize eden boyutsuz küçük parametreye göre kuvvet serisi olarak temsil edilir. İncelemeler sıfırıncı ve birinci yaklaşımlar çerçevesinde yapılır. Sıfırıncı yaklaşıma ait çözüm analitik olarak belirlenir, ancak birinci yaklaşıma ait sınırdeğer probleminin çözümü 3D FEM modellemesi kullanılarak sayısal olarak yapılır. Ele alınan sınırdeğer problemlerine ait kritik dış basınç kuvveti için sayısal sonuçlar, çeşitli PZT ve metal malzeme çiftleri için verilmiş ve tartışılmıştır.

## GİRİŞ

Mekaniksel alan ile elektriksel alanın karşılıklı etkileşiminin olduğu elastik malzemelere, elektro-elastik malzemeler adı verilmektedir. Eğer, bu iki alan arasındaki karşılıklı etki lineer olursa, bu elektro-elastik malzemeler özel olarak, piezoelektrik malzeme olarak isimlendirilir ve bu malzemeler 1880'li yıllarda Curie kardeşler tarafından deneysel olarak keşfedilmiştir. Bu malzemelerde görülen özellik; mekanik kuvvet uygulandığında yapısında kutuplanma (elektrik polarizasyon) veya tersine, elektrik alana yerleştirildiğinde mekanik deformasyon elde edilmesidir. Bu özellikleri nedeniyle bu malzemeler pek çok uygulama alanı bulmuşlardır, örneğin, çok küçük/hassas etkilerin (basınç, akım, sıcaklık vb değişimlerinin) tespit edilmesinde kullanılan çeşitli sensörler, elektrik üretici (elektrik hasadı) olarak kullanılan piezoelektrik motorlar vb. verilebilir.

Gün geçtikçe kullanım alanları yaygınlaşan bu malzemeler, pek çok teorik ve deneysel bilimsel araştırmanın da konusunu oluşturmaktadır. Bu malzemelerin yapı elemanlarında en yaygın kullanımı, piezoelektrik (PZT) malzemeden yapılmış levhaların temel unsura (yapı elemanına) yapıştırılarak kullanılması halidir. Bu işlem neticesinde çeşitli nedenler veya teknolojik uyumsuzluklar nedeniyle PZT levha ile temel unsur arasında boşluklar-çatlaklar oluşabilmektedir. Kullanım ömrü içerisinde çok farklı dış kuvvetlere maruz kalan yapı elemanlarının, yapısında ve/veya katmanları arasında bulunan bu tür boşlukların (çatlakların), yapının mukavemetini olumsuz yönde etkilediği ve dolayısıyla kırılma, burkulma-delaminasyon vb. gibi beklenmeyen durumların ortaya çıkmasına sebep olduğu aşıkardır. Bu alanda son yıllarda yapılmış bazı teorik araştırmalar kısaca aşağıda özetlenmiştir.

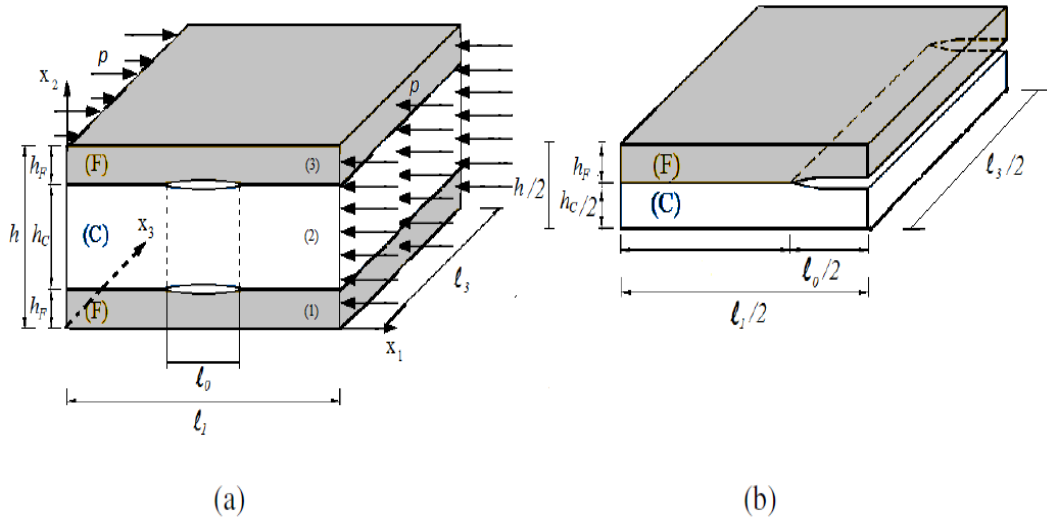
Katmanları arasında dikdörtgen çatlak içeren elastik veya viskoelastik çok katlı malzemeden yapılmış dikdörtgen kalın plağın, çatlaklar doğrultusunda karşılıklı iki kenarından etki eden dış basınç kuvveti altında, çatlak civarında oluşan burkulma- delaminasyon problemleri [1,2] kaynaklarında, viskoelastisite teorisinin lineer olmayan kesin denklemleri çerçevesinde matematiksel modeli yapılmıştır. Ele alınan bu matematiksel modeller ve seçilen bazı sınır koşulları çerçevesinde ortaya çıkan sınırdeğer problemleri, üç boyutlu sonlu elemanlar modellemesi (FEM) yardımıyla sayısal olarak çözülmüş ve ele alınan çeşitli malzeme ve geometrik parametreler için kritik parametre değerleri belirlenmiştir.

Piezoelektrik malzemeden yapılmış üç katmandan oluşan ve katmanları arasında çatlak içeren sandviç şerit-plağın karşılıklı iki kenarından çatlaklar doğrultusunda uygulanan dış basınç kuvveti etkisinde, çatlaklar civarında oluşan burkulma-delaminasyon problemleri [3] çalışmada ele alınmıştır. Bu çalışmada, çeşitli geometrik ve malzeme parametreleri ile elektriksel ve mekaniksel alanların karşılıklı etkisinin, kritik burkulma-delaminasyon kuvvetine etkileri, elektro-elastisite teorisinin lineer olmayan kesin denklemleri ve parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde modellenmiştir. Bu matematiksel model ve ele alınan bazı sınır koşulları çerçevesinde bu problemler FEM yardımıyla sayısal olarak incelenmiştir.

Yukarıda kısaca literatür özeti verilen burkulma-delaminasyon problemleri, bu çalışma kapsamında, PZT/Metal/PZT malzemeden oluşmuş üç katmanlı dikdörtgen kalın plağın, katmanlar arasında bulunan bant çatlaklar doğrultusunda etkiyen statik dış basınç kuvveti altında çatlaklar civarında oluşan burkulma-delaminasyon problemleri ele alınmış yani, [3] kaynağında ele alınan problemler dikdörtgen piezoelektrik sandviç kalın plaklar için geliştirilmiştir. Ele alınan problemler, üç boyutlu Elektro-Elastisite Teorisinin geometrik lineer olmayan kesin denklemleri çerçevesinde matematiksel olarak modellenerek, bazı sınır koşulları çerçevesinde üç boyutlu sonlu eleman formülasyonu yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür. Sayısal çözümlerin gerektirdiği bütün algoritma ve programlar tarafımızdan yapılmıştır. Farklı geometrik ve malzeme parametreleri ile elektriksel ve mekanik alanların karşılıklı etkisinin, ele alınan üç katmanlı piezoelektrik kalın plağın delaminasyon burkulmasına ait kritik parametrelere etkileri araştırılmıştır.

### ALAN DENKLEMLERİ VE FORMÜLASYON

Ele alınan ve boyutları  $\ell_1 \times h \times \ell_3$  olan piezoelektrik sandviç dikdörtgen kalın plak ve yükleme durumu Şekil 1’de verilmiştir.



Şekil 1. Bant çatlaklar içeren kalın plakta yükleme durumu ve plak geometrisi (a) Bölgenin tamamı (b) Bölgenin 1/8'lik parçası

Ele alınan problemin çözüm bölgesi,

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 - S_L^\pm - S_U^\pm, \\ \Omega_1 &= \{0 \leq x_1 \leq \ell_1; 0 \leq x_2 \leq h_F; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}, \\ \Omega_2 &= \{0 \leq x_1 \leq \ell_1; h_F \leq x_2 \leq h_F + h_C; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}, \\ \Omega_3 &= \{0 \leq x_1 \leq \ell_1; h_F + h_C \leq x_2 \leq 2h_F + h_C; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}, \\ S_L^\pm &= \{(\ell_1 - \ell_0)/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_0)/2; x_2 = h_F \mp 0; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}, \\ S_U^\pm &= \{(\ell_1 - \ell_0)/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_0)/2; x_2 = h_F + h_C \mp 0; 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}\end{aligned}\quad (1)$$

dir. Burada  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  ve  $\Omega_3$  'ler sırasıyla alt, orta ve üst katmanları;  $S_L^\pm(S_U^\pm)$  alt ve orta (orta ve üst) tabakalar arasında yer alan çatlağın alt ve üst yüzeylerini temsil etmektedir. Bu bölgede sağlanan alan denklemleri, her bir  $r_n$  'ninci ( $n=1,2,3$ ) katman için,

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{ji}^{(r_n)}}{\partial x_j} &= 0, \frac{\partial D_j^{(r_n)}}{\partial x_j} = 0, \\ K_{ji}^{(r_n)} &= T_{jk}^{(r_n)} \left( \delta_i^k + \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_k} \right) + M_{ji}^{(r_n)}, D_i^{(r_n)} = e_{ikl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n)} + \varepsilon_{ik}^{(r_n)} E_k^{(r_n)}, \\ T_{ij}^{(r_n)} &= c_{ijkl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n)} - e_{kij}^{(r_n)} E_k^{(r_n)}, s_{kl}^{(r_n)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k^{(r_n)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(r_n)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_k} \right), \\ M_{ji}^{(r_n)} &= \varepsilon_0 \left( E_i^{(r_n)} E_j^{(r_n)} - \frac{1}{2} E_k^{(r_n)} E_k^{(r_n)} \delta_i^j \right), E_k^{(r_n)} = -\frac{\partial \phi^{(r_n)}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (2)$$

olarak verilebilir. (2)'de  $i,j;k,l;n=1,2,3$  için  $T_{jk}$ , gerilme tansörü bileşenini;  $M_{ji}$ , Maxwell gerilme tansörü bileşenini;  $D_i$ , elektriksel yerdeğiştirme vektörü bileşenini;  $e_{ikl}$ , piezoelektrik sabitini;  $s_{kl}$ , Green şekildeğiştirme tansörü bileşenini;  $\varepsilon_{kl}$ , dielektrik sabitini;  $E_{kl}$ , elektrik alan bileşenini;  $c_{ijkl}$ , elastik sabitini ve  $\phi$ , elektrik potansiyelini temsil etmektedir. Ayrıca  $\varepsilon_0$  boşluğun elektriksel geçirgenliğini ve  $\delta_i^j$  Kronecker sembolünü göstermektedir.

Ele alınan plağın bütün yanal yüzeylerinden basit mesnetli ve elektriksel potansiyelin sıfır olduğu, sadece  $x_1=0; \ell_1$  yüzeylerinden statik dış basınç kuvvetine maruz olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca, plağın alt/üst ve çatlak yüzeylerinden mekaniksel ve elektriksel yükün etki etmediği kabul edilmektedir. Buna göre bu sınır koşullarına ait matematiksel ifadeler,

$$\begin{aligned} u_2^{(r_n)}|_{x_1=0; \ell_1} &= 0, \phi^{(r_n)}|_{x_1=0; \ell_1} = 0, \\ u_2^{(r_n)}|_{x_3=0; \ell_3} &= 0, \phi^{(r_n)}|_{x_3=0; \ell_3} = 0, \\ K_{11}^{(r_n)}|_{x_1=0} &= K_{11}^{(r_n)}|_{x_1=\ell_1} = p, \\ K_{13}^{(r_n)}|_{x_1=0; \ell_1} &= K_{31}^{(r_n)}|_{x_3=0; \ell_3} = K_{33}^{(r_n)}|_{x_3=0; \ell_3} = 0, \\ K_{2i}^{(r_3)}|_{x_2=h} &= K_{2i}^{(r_1)}|_{x_2=0} = 0, \\ D_2^{(r_1)}|_{x_2=0} &= D_2^{(r_3)}|_{x_2=h} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{ji}^{(r_3)}|_{S_U^+} n_{jU}^+ &= K_{ji}^{(r_2)}|_{S_U^-} n_{jU}^- = D_j^{(r_3)}|_{S_U^+} n_{jU}^+ = D_j^{(r_2)}|_{S_U^-} n_{jU}^- = 0 \\
 K_{ji}^{(r_2)}|_{S_L^+} n_{jL}^+ &= K_{ji}^{(r_1)}|_{S_L^-} n_{jL}^- = D_j^{(r_2)}|_{S_L^+} n_{jL}^+ = D_j^{(r_1)}|_{S_L^-} n_{jL}^- = 0
 \end{aligned} \quad (3)$$

verilebilir.

Sandviç plağın tabakaları arasında temas koşulları  $0 \leq x_1 \leq (l_1 - l_0)/2 \cup (l_1 + l_0)/2 \leq x_1 \leq l_1$  ve  $0 \leq x_3 \leq l_3$  için

$$\begin{aligned}
 K_{2i}^{(r_1)}|_{x_2=h_F} &= K_{2i}^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, u_i^{(r_1)}|_{x_2=h_F} = u_i^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, \\
 \phi^{(r_1)}|_{x_2=h_F} &= \phi^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, D_2^{(r_1)}|_{x_2=h_F} = D_2^{(r_2)}|_{x_2=h_F}, \\
 K_{2i}^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} &= K_{2i}^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}, u_i^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} = u_i^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}, \\
 \phi^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} &= \phi^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}, D_2^{(r_2)}|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_3)}|_{x_2=h_F+h_C}
 \end{aligned} \quad (4)$$

şeklinde verilebilir.

Ele alınan (1),(2),(3) ve (4) sınırdeğer problemi dış katmanları piezoelektrik, orta katmanı metal malzemeden yapılmış ve katmanlar arasında paralel iki adet bant çatlak olan piezoelektrik sandviç dikdörtgen kalın plağın, karşılıklı iki kenarından düzgün yayılı statik dış basınç kuvveti etkisinde, çatlaklar civarında oluşan delaminasyon burkulma problemi temsil etmektedir. Ele alınan problem nonlinear bir problemidir. Bu nonlinear problemin çözümü lineerleştirme işlemleri sonucunda, lineer seri-sınırdeğer problemlerinin çözümüne indirgenir [4]. [1-4] çalışmalarına dayanarak, aranan büyüklükler boyutsuz küçük parametre olan  $\varepsilon$  'a göre seri formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\{\sigma_{ij}^{(k)}; \varepsilon_{ij}^{(k)}; u_i^{(k)}\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \{\sigma_{ij}^{(k),q}; \varepsilon_{ij}^{(k),q}; u_i^{(k),q}\}, \varepsilon \ll 1 \quad (5)$$

(5) ifadeleri (2),(3) ve (4)'te yerine yazılır  $\varepsilon$  'un kuvvetlerine göre düzenlenerek gruplaştırılırsa, bu parametrenin kuvvetlerine göre düzenlenmiş alan denklemleri, sınır ve temas koşullarından oluşan seri-sınırdeğer problemleri elde edilir. Kolaylık olsun diye  $\varepsilon$  'un kuvvetlerine göre düzenlenmiş her bir sınırdeğer problemi,  $\varepsilon$  'un kuvvetine göre isimlendirilmiştir. Örneğin sıfıncı, birinci vb. sınırdeğer problemi veya yaklaşım. Ele alınan delaminasyon burkulma probleminin çözümü, (5) yardımıyla elde edilen seri-sınırdeğer problemlerinin çözümlerinin süperpozisyonu olarak elde edilecektir.

Ele alınan üç katlı piezoelektrik sandviç kalın plakta delaminasyona sebep olan kritik dış basınç kuvvetinin belirlenmesinde, (5) yardımıyla elde edilen seri-sınırdeğer problemlerinden sadece sıfıncı ve birinci yaklaşımın çözülmesi yeterlidir [4].

Her bir yaklaşımda elde edilen büyüklükler, kendisinden sonraki yaklaşımlarda denklem sisteminin yapısında yer aldığından, birinci yaklaşımın çözümünü elde edebilmek için önce sıfıncı yaklaşım çözümlidir. Sıfıncı yaklaşıma ait çözüm, belirli kabuller altında analitik olarak elde edilebilmektedir [2,4].

İkinci yaklaşıma ait sınırdeğer probleminin çözümü, üç boyutlu sonlu elemanlar modellemesi yardımıyla sayısal olarak elde edilecektir. Çözüm bölgesi dikdörtgen prizma şeklinde sonlu elemanlara ayrıştırılacak ve nodlarda bilinmeyen olarak, üç eksen doğrultusundaki yerdeğiştirmeler ile elektriksel potansiyel  $\phi$  alınacaktır. Sonlu eleman modellemesi için, cisimde biriken toplam elektro-mekanik enerjiyi ifade eden  $\Pi$  fonksiyoneli kullanılacaktır [3,5]:

$$\Pi(u_1^{(r_n),1}, u_2^{(r_n),1}, u_3^{(r_n),1}, \phi^{(r_n),1}) = \sum_{n=1}^3 \iiint_{\Omega_n} \left[ \frac{1}{2} G_{ijkl}^{(r_n),1} \frac{\partial u_i^{(r_n),1}}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^{(r_n),1}}{\partial x_l} + R_{ijk}^{(r_n),1} \frac{\partial \phi^{(r_n),1}}{\partial x_i} \frac{\partial u_j^{(r_n),1}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{(r_n),1} \frac{\partial \phi^{(r_n),1}}{\partial x_k} \frac{\partial \phi^{(r_n),1}}{\partial x_l} \right] d\Omega_n \quad (6)$$

$\Pi$  fonksiyoneli ve bilinen Ritz tekniği yardımıyla çözüm cebirsel denklemler takımının çözümüne indirgenir. Amacımız ele alınan piezoelektrik dikdörtgen kalın plağın içerdiği çatlaklar civarında delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik dış basınç kuvvetinin belirlenmesi olduğundan, bu kritik değer, sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla elde edilen cebirsel denklem takımının katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşitlenmesiyle belirlenecektir.

### SAYISAL SONUÇLAR

Ele alınan problemin çözümünden elde edilen sayısal sonuçların analizinden önce sayısal araştırmaların gerektirdiği algoritma ve programlara güven, özel durumda, bu algoritma ve programlar ile elde edilen sayısal sonuçların literatürde bilinen uygun sonuçlarla test edilmesi ile sağlanmıştır. Örneğin, yapısında paralel iki bant çatlak içeren izotrop dikdörtgen kalın plak için  $\ell_0/\ell = 0,5$ ;  $h/\ell = 0,15$  durumunda farklı dış katman yüksekliği ( $h_F$ ) ve serbestlik derecesine (NDOF) göre elde edilen sayısal sonuçlar Çizelge 1’de verilmiştir. Burada  $N_x$ ,  $N_y$  ve  $N_z$  sırasıyla  $x_1$ ,  $x_2$  ve  $x_3$  doğrultularında alınan sonlu eleman sayılarıdır. Belirtelim ki, sonlu eleman hesaplamaları ve çözüm, çözüm bölgesinin 1/8 lik kısmı kullanılarak yapılmıştır.

Çizelge 1.  $p_{cr}/\mu$  ( $\mu = \frac{E}{1+\nu}$ ) kritik delaminasyon burkulma kuvveti

| $(N_x, N_y, N_z)$ | NDOF   | $h_F$  |        |        |
|-------------------|--------|--------|--------|--------|
|                   |        | 0.025  | 0.0375 | 0.05   |
| (12,40,40)        | 13188  | 0,0124 | 0,0222 | 0,0340 |
| (24,40,40)        | 23772  | 0,0123 | 0,0220 | 0,0339 |
| (24,60,40)        | 35112  | 0,0123 | 0,0219 | 0,0338 |
| (24,100,40)       | 57792  | 0,0122 | 0,0219 | 0,0338 |
| (24,100,60)       | 85312  | 0,0122 | 0,0218 | 0,0337 |
| (24,100,100)      | 140352 | 0,0120 | 0,0217 | 0,0335 |
| Tekin (2011)[2]   | -      | 0,0120 | 0,0217 | 0,0336 |

Çizelge 2’de ele alınan çalışmada kullanılan PZT malzemelerine ait mekanik, piezoelektrik ve dielektrik sabitler verilmiştir.

Çizelge 2. Bazı piezoelektrik malzemelerin mekanik, piezoelektrik ve dielektrik değerleri

| Malzemeler<br>(Yang,2005) | $c_{11}^{(\eta)}$ | $c_{12}^{(\eta)}$ | $c_{13}^{(\eta)}$ | $c_{33}^{(\eta)}$ | $c_{44}^{(\eta)}$ | $c_{66}^{(\eta)}$ | $e_{31}^{(\eta)}$ | $e_{33}^{(\eta)}$ | $e_{15}^{(\eta)}$ | $\varepsilon_{31}^{(\eta)}$ | $\varepsilon_{33}^{(\eta)}$ |
|---------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| PZT-4                     | 13,9              | 7,78              | 7,40              | 11,5              | 2,56              | 3,06              | -5,2              | 15,1              | 12,7              | 0,646                       | 0,562                       |
| PZT-5H                    | 12,6              | 7,91              | 8,39              | 11,7              | 2,30              | 2,35              | -6,5              | 23,3              | 17,0              | 1,505                       | 1,302                       |
| BaTiO <sub>3</sub>        | 15,0              | 6,53              | 6,62              | 14,6              | 4,39              | 4,24              | -4,3              | 17,5              | 11,4              | 0,987                       | 1,116                       |
|                           | $\times 10^{10}$  |                   |                   | $N / m^2$         |                   |                   | $C / m^2$         |                   |                   | $\times 10^{-8}$            | $C / Vm$                    |

Çizelge 3’te  $h / \ell_1 = 0,2; h_F / \ell_1 = 0,05$  durumunda çatlak uzunluğu ( $\ell_0$ ) ve  $\gamma (= \ell_3 / \ell_1)$ ’nin değişiminin kritik şekildeğiştirme değerlerine ( $T_{11}^{(\eta),0} / C_{44}^{PZT-4}$ ) etkisi incelenmiştir. Çizelgedeki sayısal sonuçlardan  $\gamma$  değeri arttıkça (yani,  $x_3$  doğrultusundaki yapı elamanının boyutu arttıkça) elde edilen sayısal sonuçlar, düzlem şekildeğiştirme durumunda elde edilen [4] kaynağındaki uygun sayısal değerlere yakınsadığı görülmektedir.

Çizelge 1 ve Çizelge 3’te verilen sayısal sonuçlardan görüldüğü gibi tarafımızdan yapılan algoritma ve programlar ile elde edilen sayısal sonuçların, özel durumda literatürde verilen uygun sayısal sonuçlar ile uyum içinde olması, tarafımızdan yapılan bu algoritma ve programlara güveni sağlamıştır.

Çizelge 3. PZT-4/Aluminyum/PZT-4 sandviç dikdörtgen kalın plağın farklı  $\gamma (= \ell_3 / \ell_1)$  ve

$$\ell_0 / \ell_1 \text{ için } T_{11}^{(\eta),0} / C_{44}^{PZT-4} \text{ değerleri } \left( \begin{array}{l} e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0 \\ e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0 \end{array} \right)$$

| $\gamma = \ell_3 / \ell_1$          |                                      | $\ell_0 / \ell_1$       |                         |                         |                         |                         |                         |                         |
|-------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
|                                     |                                      | 0,2                     | 0,3                     | 0,4                     | 0,5                     | 0,6                     | 0,7                     | 0,0                     |
| 1                                   | $T_{11}^{(\eta),0} / C_{44}^{PZT-4}$ | $\frac{0,1051}{0,1252}$ | $\frac{0,0656}{0,0766}$ | $\frac{0,0450}{0,0523}$ | $\frac{0,0334}{0,0389}$ | $\frac{0,0263}{0,0310}$ | $\frac{0,0217}{0,0262}$ | $\frac{0,0335}{0,0385}$ |
| 3                                   | $T_{11}^{(\eta),0} / C_{44}^{PZT-4}$ | $\frac{0,1029}{0,1217}$ | $\frac{0,0626}{0,0721}$ | $\frac{0,0415}{0,0471}$ | $\frac{0,0293}{0,0343}$ | $\frac{0,0218}{0,0254}$ | $\frac{0,0168}{0,0208}$ | $\frac{0,0294}{0,0343}$ |
| 6                                   | $T_{11}^{(\eta),0} / C_{44}^{PZT-4}$ | $\frac{0,0955}{0,1114}$ | $\frac{0,0589}{0,0686}$ | $\frac{0,0382}{0,0446}$ | $\frac{0,0270}{0,0315}$ | $\frac{0,0194}{0,0229}$ | $\frac{0,0144}{0,0179}$ | $\frac{0,0267}{0,0312}$ |
| Akbarov,<br>Yahnioğlu<br>(2013) [4] | $T_{11}^{(\eta),0} / C_{44}^{PZT-4}$ | $\frac{0,0900}{0,1100}$ | $\frac{0,0575}{0,0660}$ | $\frac{0,0375}{0,0430}$ | $\frac{0,0260}{0,0300}$ | $\frac{0,0190}{0,0220}$ | $\frac{0,0140}{0,0170}$ | $\frac{0,0260}{0,0300}$ |

Ele alınan çalışmada önemli etkilerden biri de elektriksel alan ile mekaniksel alanın karşılıklı etkisinin, kritik parametrelere olan etkisinin ortaya konmasıdır. Bu etki, piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin göz önüne alınması ( $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ ) ve alınmaması ( $e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0$ ) ile açığa çıkartılabilir. Buna göre Çizelge 4’te PZT-5H/Aluminyum/PZT-5H sandviç plağın  $h / \ell_1 = 0,2; h_F / \ell_1 = 0,05$  durumunda farklı  $\ell_0$  ve  $\gamma$  değerleri için belirlenen kritik

burkulma kuvvetine, elektriksel ve mekaniksel alanların karşılıklı etkisi verilmiştir. Çizelge 4'te verilen sayısal sonuçlardan  $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$  durumundan elde edilen kritik dış basınç kuvvetinin her zaman  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0$  durumunda elde edilen kritik dış basınç kuvveti değerlerinden daha büyük olduğu tespit edilmiştir. Yani, piezoelektrik özellik kritik parametre değerini artırmaktadır. Öngörülebilir bu etki piezoelektrik malzemelerde "stiffening effect" olarak açıklanmaktadır. Yani, uygulanan basınç kuvvetin bir kısmı malzemenin yapısında kutuplanmaya harcandığından, delaminasyon burkulma değeri artmaktadır. Ayrıca belirtilen çizelgede verilen sayısal sonuçlardan,  $\gamma$  arttıkça ve çatlak uzunluğu arttıkça kritik dış basınç kuvvetinin değeri azalmakta ve bu değerler  $\gamma \rightarrow \infty$  için belirli bir asimptota yaklaşmaktadır.

Çizelge 5'te  $h/\ell_1 = 0,2; \ell_3 = \ell_1 (\gamma = 1)$  olduğu durumda farklı  $\ell_0$  ve  $h_F$  değerleri için ele alınan PZT-5H/Aluminyum/PZT-5H sandviç dikdörtgen kalın plağa ait kritik delaminasyon burkulma değerleri verilmektedir. Bu çizelgede verilen sayısal sonuçlardan görüldüğü üzere, dış katman (PZT levha) yüksekliği azaldıkça ve çatlak uzunluğu ( $\ell_0$ ) arttıkça kritik dış basınç kuvvetinin değeri azalmaktadır. Ayrıca ele alınan plakta (PZT-5H/Aluminyum/PZT-5H) PZT levha kalınlığı ( $h_F$  değeri) arttıkça  $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$  ve  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0$  durumlarında elde edilen kritik dış basınç kuvvetleri arasındaki fark da artmaktadır. Belirtelim ki, Çizelge 5'in son sütununda ele alınan sandviç dikdörtgen kalın plağın yapısında çatlak olmadığı durumda ( $\ell_0/\ell_1 = 0$ ) bulunan uygun kritik delaminasyon burkulma değeri verilmektedir.

Şekil 2'de PZT-5H/Aluminyum/PZT-5H dikdörtgen sandviç plakta  $h/\ell_1 = 0,2; h_F/\ell_1 = 0,0333; \ell_0/\ell_1 = 0,2$  ve  $\ell_3 = \ell_1$  olduğu durumda  $x_2 = h_F + h_C + 0^+$ 'da ve  $p/c_{44}^{PZT-5H} = 0,2604 (< p_{cr}/c_{44}^{PZT-5H})$  için plağın çatlak yüzey grafiği verilmektedir. Buna göre dış basınç kuvveti kritik değerine yaklaştıkça, yüzey üzerindeki yerdeğiştirmelerin değeri çok çok büyümektedir. Ayrıca dış basınç kuvveti arttıkça çatlak yüzey formunun, başlangıçta verilen ön eğintinin formu ile uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 4. PZT-5H/Aluminyum/PZT-5H sandviç dikdörtgen kalın plağın farklı

| $\gamma (= \ell_3/\ell_1)$ ve $\ell_0/\ell_1$ için $p_{cr}/C_{44}^{PZT-5H}$ değerleri $\left( \begin{array}{l} e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0 \\ e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0 \end{array} \right)$ |                          | $\ell_0/\ell_1$ |        |        |        |        |
|---|--------------------------|-----------------|--------|--------|--------|--------|
|   |                          | 0,2             | 0,3    | 0,4    | 0,5    | 0,7    |
| 1   | $p_{cr}/C_{44}^{PZT-5H}$ | 0,3301          | 0,2000 | 0,1345 | 0,0982 | 0,0628 |
|   |                          | 0,4098          | 0,2502 | 0,1708 | 0,1274 | 0,0868 |
| 3   | $p_{cr}/C_{44}^{PZT-5H}$ | 0,3240          | 0,1918 | 0,1249 | 0,0872 | 0,0493 |
|   |                          | 0,3981          | 0,2347 | 0,1527 | 0,1068 | 0,0607 |
| 5   | $p_{cr}/C_{44}^{PZT-5H}$ | 0,3235          | 0,1904 | 0,1235 | 0,0858 | 0,0479 |
|   |                          | 0,3971          | 0,2336 | 0,1514 | 0,1054 | 0,0593 |
| 7   | $p_{cr}/C_{44}^{PZT-5H}$ | 0,3232          | 0,1899 | 0,1230 | 0,0853 | 0,0474 |
|   |                          | 0,3968          | 0,2332 | 0,1509 | 0,1049 | 0,0588 |

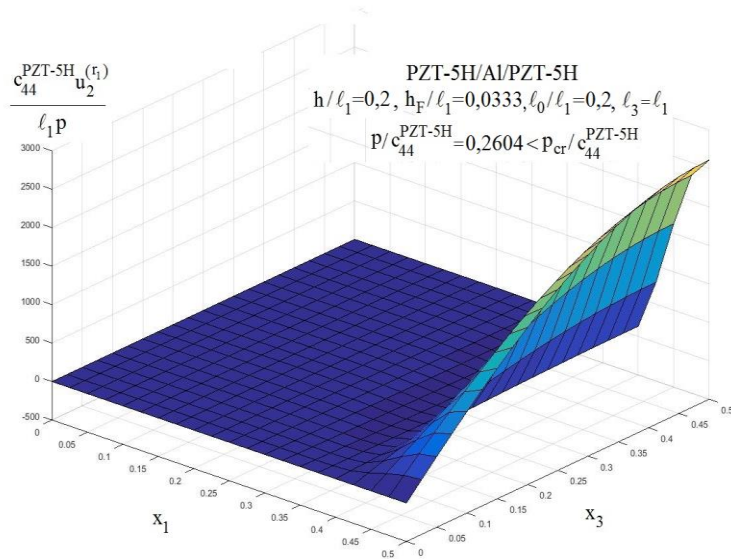


|   |                          |                         |                         |                         |                         |                         |
|---|--------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 9 | $p_{cr}/C_{44}^{PZT-5H}$ | $\frac{0,3231}{0,3965}$ | $\frac{0,1896}{0,2329}$ | $\frac{0,1227}{0,1506}$ | $\frac{0,0850}{0,1046}$ | $\frac{0,0471}{0,0585}$ |
|---|--------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|

Çizelge 5. PZT-5H/Aluminyum/PZT-5H sandviç dikdörtgen kalın plağın farklı  $h_F$  ve  $\ell_0$  için

$$p_{cr}/C_{44}^{PZT-5H} \text{ değerleri } \left( \begin{array}{l} e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0 \\ e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0 \end{array} \right)$$

| $h_F / \ell_1$ |                          | $\ell_0 / \ell_1$       |                         |                         |                         |                         |                         |                         |                         |
|----------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
|                |                          | 0,1                     | 0,2                     | 0,3                     | 0,4                     | 0,5                     | 0,6                     | 0,7                     | 0,0                     |
| 0,0166         | $p_{cr}/C_{44}^{PZT-5H}$ | $\frac{0,3694}{0,3758}$ | $\frac{0,1154}{0,1213}$ | $\frac{0,0592}{0,0658}$ | $\frac{0,0351}{0,0354}$ | $\frac{0,0239}{0,0242}$ | $\frac{0,0176}{0,0182}$ | $\frac{0,0140}{0,0160}$ | $\frac{0,1280}{0,1820}$ |
| 0,0333         | $p_{cr}/C_{44}^{PZT-5H}$ | $\frac{0,5203}{0,5946}$ | $\frac{0,2286}{0,2604}$ | $\frac{0,1246}{0,1432}$ | $\frac{0,0790}{0,0926}$ | $\frac{0,0556}{0,0672}$ | $\frac{0,0422}{0,0529}$ | $\frac{0,0339}{0,0451}$ | $\frac{0,1321}{0,1856}$ |
| 0,0500         | $p_{cr}/C_{44}^{PZT-5H}$ | $\frac{0,6097}{0,7401}$ | $\frac{0,3301}{0,4098}$ | $\frac{0,2000}{0,2502}$ | $\frac{0,1345}{0,1708}$ | $\frac{0,0982}{0,1274}$ | $\frac{0,0765}{0,1023}$ | $\frac{0,0628}{0,0868}$ | $\frac{0,1398}{0,1902}$ |
| 0,0666         | $p_{cr}/C_{44}^{PZT-5H}$ | $\frac{0,6729}{0,8701}$ | $\frac{0,4099}{0,5441}$ | $\frac{0,2703}{0,3606}$ | $\frac{0,1920}{0,2582}$ | $\frac{0,1453}{0,1979}$ | $\frac{0,1160}{0,1611}$ | $\frac{0,0972}{0,1380}$ | $\frac{0,1440}{0,1960}$ |



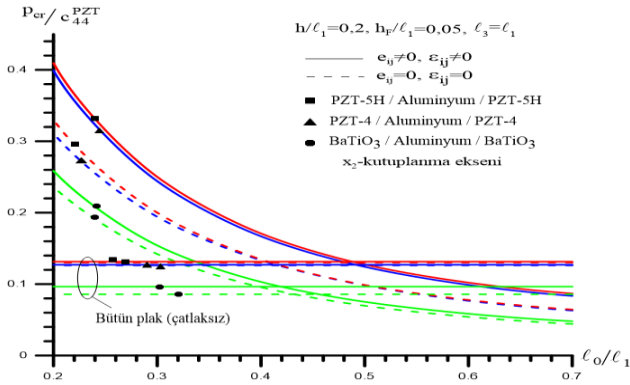
Şekil 2. PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç dikdörtgen kalın plağın  $p/c_{44}^{PZT-5H} = 0,2604$  için

$$x_2 = h_F + h_C + 0^+ \text{ kesitinde yüzey grafiği}$$

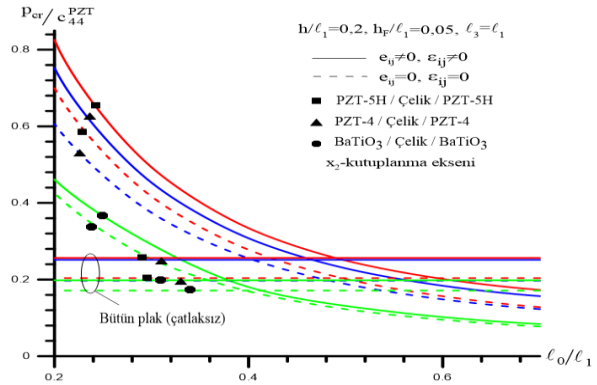
Şekil 3 ve Şekil 4’te farklı PZT dış katman malzemeleri için orta katmanın Aluminyum (Şekil 3) ve Çelik (Şekil 4) olması durumlarında elde edilen sayısal sonuçlar verilmiştir. Şekiller üzerinde sürekli kalın (kesikli) çizgiler piezoelektrik özelliğin göz önüne alınması (alınmaması) yani  $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$  ( $e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0$ ) durumlarında elde edilmiştir. Bu şekillerden

yine, piezoelektrik özelliğin göz önüne alınmasının kritik parametre değerlerini artırdığı açıkça görülmektedir. Ayrıca, orta katmanın Çelik alınması durumunda elde edilen sayısal sonuçların, Alüminyum alınması durumunda bulunan uygun sayısal sonuçlardan her zaman büyük kaldığı tespit edilmiştir. Yine Şekil 3 ve Şekil 4'ten, farklı PZT malzemeleri için elde edilen kritik değerler için aşağıdaki ilişkinin sağlandığı görülmektedir:

$$p_{Cr} / c_{44}^{PZT-5H} > p_{Cr} / c_{44}^{PZT-4} > p_{Cr} / c_{44}^{BaTiO_3} \quad (7)$$



Şekil 3. PZT/Alüminyum/PZT sandviç dikdörtgen kalın plağın farklı PZT ve  $l_0$  çatlak uzunluklarına ait kritik delaminasyon burkulma kuvveti değerleri



Şekil 4. PZT/Çelik/PZT sandviç dikdörtgen kalın plağın farklı PZT ve  $l_0$  çatlak uzunluklarına ait kritik delaminasyon burkulma kuvveti değerleri

**Teşekkür:** Sayın Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV'a bu çalışmanın gerçekleştirilmesindeki yardımlarından dolayı teşekkür ederiz.

Bu çalışma Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince desteklenmiştir. Proje Numarası: 2016-07-03-DOP03.

### KAYNAKLAR

- [1] S.D. Akbarov, N. Yahnioglu, E. Karatas, Buckling delamination of a rectangular plate containing a rectangular crack and made from elastic and viscoelastic composite materials, *International Journal of Solids and Structures*. 47(25-26) (2010) 3426-3434 doi:10.1016/j.ijsolstr.2010.08.018
- [2] S.D. Akbarov, N. Yahnioglu, A. Tekin, 3D FEM analysis of the buckling delamination of a rectangular sandwich plate containing interface rectangular cracks and made from elastic and viscoelastic materials, *Computer Modelling in Engineering and Sciences*, 64 (2010) 147-186. doi:10.3970/cmcs.2010.064.147
- [3] S.D. Akbarov, N. Yahnioglu, Buckling delamination of a sandwich plate-strip with piezoelectric face and elastic core layers, *Applied Mathematical Modelling*. 37(16-17) (2013) 8029-8038. doi:10.1016/j.apm.2013.02.051.
- [4] S.D. Akbarov, *Stability Loss and Buckling Delamination: Three-Dimensional Linearized Approach for Elastic and Viscoelastic Composites*, Springer. Heidelberg, New York, 2013.
- [5] J.S. Yang, *An introduction to the theory of piezoelectricity*, Springer. (2004).